

Estrategias didácticas mediadas por tecnologías para el aprendizaje complejo de conceptos asociados a la dinámica lineal en carreras de ingeniería.

Eduardo Totter , Silvia Raichman, Aníbal Mirasso, Francisco Tinelli, Emiliano López

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

Mendoza - Argentina

etotter@fing.uncu.edu.ar, sraichman@fing.uncu.edu.ar, aemirasso@fing.uncu.edu.ar

Resumen

En general, el abordaje del proceso de análisis y resolución de un determinado problema perteneciente al ámbito ingenieril, se encuentra asociado a un adecuado proceso de modelación del mismo. Dicho proceso implica el seguimiento de una serie de etapas claramente definidas que se inicia con la identificación clara y precisa de las variables y parámetros físicos que gobiernan el problema en estudio y culmina con la obtención del modelo matemático, el cual a partir de su adecuada resolución va a permitir la obtención de las respuestas del sistema en términos de las variables seleccionadas. El modelo matemático mencionado a menudo está constituido por un cierto número de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales que presentan un determinado nivel de complejidad en su resolución y que exigen a los estudiantes un cierto nivel de abstracción que puede provocar en algunos casos una desvinculación o punto de quiebre entre el problema matemático que se está resolviendo y el problema físico real que da origen a dicho modelo matemático. Lo mencionado es el caso de los problemas relacionados al estudio y resolución de sistemas físicos asociados a la dinámica lineal de varios grados de libertad, en los cuales los estudiantes deben abordar la resolución analítica y/o numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden, ordinarias o parciales según el caso. Es precisamente en este punto donde la disponibilidad de recursos tecnológicos interactivos, junto con una articulada, oportuna y coherente utilización de los mismos en el marco de un modelo pedagógico dinámico y

flexible, permite a los estudiantes acceder a una valiosa y enriquecedora multiplicidad de herramientas de visualización y análisis de un determinado fenómeno dinámico. De esta manera la comprensión y resolución de conceptos de formulación matemática de problemas físicos para sistemas dinámicos lineales de interés, se ve potenciada por la utilización de dichos recursos tecnológicos, incrementándose a la vez la movilización de aquellos procesos cognitivos que derivan en un incremento en la calidad del aprendizaje significativo de los conceptos estudiados.

En este trabajo se presenta una descripción de las estrategias didácticas que implican la utilización de una serie de dispositivos dinámicos orientados a la experimentación en el aula de trabajo, específicamente diseñados para la presente propuesta, tendientes a promover el aprendizaje complejo de contenidos asociados al estudio y resolución de sistemas dinámicos lineales, en el marco de la asignatura Matemática Avanzada de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica que se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo. Se incluyen aspectos inherentes a las características principales de los dispositivos y a la forma en que los mismos interactúan con el resto de los recursos disponibles. Se presentan algunos resultados obtenidos a partir de la aplicación de las estrategias didácticas mencionadas.

Palabras claves: ingeniería en mecatrónica, dinámica lineal, Matemática Avanzada, aprendizaje complejo, recursos tecnológicos.

Introducción

La asignatura Matemática Avanzada se desarrolla durante el cuarto semestre de la carrera de ingeniería en Mecatrónica que se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, en la provincia de Mendoza, República Argentina.

Anualmente cursan la asignatura un promedio de 20 estudiantes, los cuales a partir del avance logrado en sus respectivas carreras, poseen los suficientes conocimientos de base en las asignaturas Álgebra, Geometría Analítica, Física I, Física II, Análisis Matemático I, Análisis Matemático II y Cálculo Numérico, que les brindan las herramientas de trabajo necesarias para abordar con éxito el estudio de los contenidos de la asignatura Matemática Avanzada.

De la lectura de los objetivos generales de la asignatura, (*Programa de Matemática Avanzada, 2013*), se destacan dos en especial asociados a la propuesta presentada en este trabajo:

- Proveer al alumno de los conocimientos y habilidades necesarios para el estudio y comprensión de modelos matemáticos de sistemas dinámicos lineales mediante métodos analíticos y numéricos.
- Promover el acercamiento del estudiante a la investigación y a la innovación en ingeniería.

En relación al primero de los objetivos mencionados es importante destacar que los sistemas dinámicos estudiados en la asignatura derivan en la obtención de modelos matemáticos que poseen un cierto grado de complejidad para los estudiantes. Dichos modelos se encuentran constituidos en general o bien por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, o en otros casos por ecuaciones diferenciales parciales de segundo o mayor orden.

Lo mencionado cobra gran importancia cuando se observa la problemática desde el punto de vista de las dificultades que provoca

al estudiante, el hecho de vincular y tender un puente cognitivo entre la resolución puramente matemática del problema y el significado físico que dicho problema trae aparejado, especialmente a la hora de analizar las respuestas obtenidas y extraer las conclusiones correspondientes a partir de las mismas.

Desde el punto de vista del segundo objetivo mencionado, es suficientemente aceptado que el acercamiento de los estudiantes a la investigación científica junto con un temprano despertar en los mismos del espíritu innovador, son aspectos que es necesario abordar y desarrollar en forma adecuada, desde los primeros años de las carreras de ingeniería (*Totter, et. al., 2011*).

De esta manera y de acuerdo a lo mencionado, la introducción al aula de trabajo de la asignatura de una serie de estrategias didácticas que involucren la utilización de una variedad de recursos educativos tecnológicos se convierte en un enlace bidireccional entre los objetivos mencionados, a la vez que cumplen un papel fundamental a la hora de disminuir la desvinculación entre la resolución meramente matemática de los problemas dinámicos planteados y su significado físico y concreto con un problema real de la ingeniería.

El diseño de una intervención educativa que incorpore como estrategia didáctica la utilización de dispositivos tecnológicos específicamente diseñados para su utilización en las aulas, es posible realizarla a partir de diversas configuraciones didácticas y en el marco de diferentes aspectos metodológicos y teóricos que brinden un marco de contención y referencia, tales como el Aprendizaje Basado en Problemas, (*Verdejo, Freixas, 2009*), (*Raichman, et. al., 2013*) o el Aprendizaje Basado en Proyectos, (*Collazos Morales, 2009*), por citar algunos de ellos.

En todos los casos mencionados, las estrategias de utilización, adecuadamente desarrolladas y articuladas, brindan en forma adicional la atrayente posibilidad de lograr adecuados niveles de interés y compromiso por parte de los estudiantes participantes de la

propuesta, a partir del efecto motivador que las mismas generan.

El contenedor natural de las estrategias didácticas mencionadas precedentemente es el modelo pedagógico que adopta la asignatura. Dicho modelo debe poseer características específicas y perfectamente definidas, relacionadas en todos los casos a la posibilidad de brindar un marco adecuado para permitir la introducción de las estrategias e intervenciones educativas que el equipo docente diseña, desarrolla e implementa. Estas características giran en torno principalmente a la flexibilidad y dinamismo del mismo, de manera que la introducción de las intervenciones didácticas diseñadas posea espacios propios y definidos y alcancen la importancia prevista en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura.

En forma adicional la propuesta se complementa con la utilización de escenarios computacionales interactivos, diseñados especialmente para su uso en conjunto con los recursos tecnológicos presentes en la misma. La utilización de dichos escenarios computacionales, completa una variedad multidimensional de recursos educativos que tienden a potenciar la calidad del aprendizaje significativo de los contenidos estudiados. De este modo se transforma el aprendizaje indirecto por una experiencia educativa directa en la que se incrementan de manera apreciable las posibilidades de visualización, interacción y experimentación de los estudiantes con un determinado problema dinámico de interés ingenieril, a partir de un horizonte formativo dado por una intencionalidad educativa coherente con los objetivos planteados previamente y con el modelo pedagógico de la asignatura.

Este trabajo presenta una descripción de estrategias educativas de utilización de objetos de aprendizaje de base computacional y experimental orientados específicamente para su utilización en problemas asociados al estudio, resolución y análisis del comportamiento de sistemas dinámicos lineales de interés en ingeniería. La utilización

de los mismos se desarrolla en el marco de la asignatura **Matemática Avanzada** correspondiente a la carrera de ingeniería en Mecatrónica que se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo en la provincia de Mendoza, Argentina.

Sistemas dinámicos lineales

Con el objeto de delimitar adecuadamente los conceptos a desarrollar es necesario indicar algunos elementos de importancia. Entendiendo un sistema físico como un conjunto de objetos materiales que interactúan entre sí de determinada manera, pensamos entonces en un sistema dinámico cuando las variables que gobiernan el comportamiento del mismo, presentan una evolución en el tiempo. Si el sistema dinámico estudiado es lineal, rige el principio de superposición y los procedimientos de resolución son relativamente más sencillos y expeditivos que los correspondientes a problemas de características no lineales.

| Problema real – Sistema dinámico | Modelo matemático |
|---|--|
| Sistemas traslacionales de un grado de libertad | $m\ddot{u} + b\dot{u} + ku = F(t)$ |
| Sistemas traslacionales de n grados de libertad | $M\ddot{\mathbf{u}} + B\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{F}(t)$ |
| Sistemas rotacionales de n grados de libertad | $M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + B\dot{\boldsymbol{\theta}} + K\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}(t)$ |
| Sistema de cuerda vibrante. | $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$ |
| Vibraciones longitudinales en barras. | $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$ |
| Vibración de una placa plana. | $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ |

Tabla 1. Ejemplos de sistemas dinámicos estudiados en el marco de la asignatura y sus correspondientes modelos matemáticos.

Con el objeto de ilustrar el presente punto, la Tabla 1 muestra algunos ejemplos de sistemas dinámicos lineales que forman parte de los

contenidos estudiados en la asignatura Matemática Avanzada y su correspondiente modelo matemático sobre el que se desarrollan los trabajos de resolución y análisis por parte de los estudiantes, (*Programa de Matemática Avanzada*, 2013).

En dicha tabla, el punto superior representa la derivación de la variable correspondiente con respecto al tiempo y los distintos términos presentes en las ecuaciones poseen el siguiente significado:

m : masa del sistema.

M : matriz de masas del sistema.

b : coeficiente de amortiguamiento.

B : matriz de amortiguamiento.

k : rigidez del sistema.

K : matriz de rigidez.

$F(t)$: matriz de fuerzas o pares exteriores. actuantes sobre el sistema dinámico.

u : coordenada generalizada de desplazamiento horizontal de las masas.

U : Matriz de coordenadas generalizadas de desplazamiento horizontal de las diversas masas.

θ : coordenada generalizada de giro de la masa.

Θ : Matriz de coordenadas generalizadas de giro de las diversas masas.

T : tensión de la cuerda vibrante.

E : módulo de elasticidad longitudinal del material.

ρ : densidad del material.

La columna derecha correspondiente a la Tabla 1, muestra las ecuaciones diferenciales que constituyen el modelo matemático a resolver en cada uno de los sistemas dinámicos mencionados en la misma.

Dicha resolución implica la obtención a partir de procedimientos analíticos y/o numéricos apropiados a cada caso, de las funciones que representan la evolución temporal de las variables seleccionadas en los problemas de oscilaciones libres y forzadas de los sistemas en estudio.

Recursos tecnológicos desarrollados para el estudio de sistemas dinámicos lineales

En el momento de comenzar a pensar en el desarrollo de los recursos tecnológicos diseñados específicamente para su utilización en la presente propuesta, es necesario en primer lugar delimitar dos grupos principales de recursos:

- Recursos tecnológicos experimentales.
- Recursos tecnológicos computacionales interactivos.

Si bien ambos tipos de recursos se diseñan para su utilización conjunta y articulada en las aulas de trabajo de la asignatura, los mismos poseen diferencias fundamentales entre sí en cuanto a las posibilidades didácticas a partir de las actividades que con ellos se generan.

Por un lado los recursos tecnológicos de base experimental, promueven capacidades asociadas a la investigación científica y a la experimentación a partir de la utilización de los dispositivos concretos, (*Totter, et. al., 2013*). De esta manera, es posible repetir el experimento, establecer conclusiones al respecto y debatir en grupos de trabajo junto con el docente a cargo, a partir de la observación concreta del fenómeno físico asociado al sistema dinámico en estudio y sus correspondientes parámetros de control y de respuesta.

Por otra parte, los recursos tecnológicos computacionales interactivos, poseen una base teórica estructurada a partir del concepto de simulación computacional interactiva, (*Totter, et. al., 2011*). Dichas simulaciones, movilizan procesos de visualización y comprensión profunda de ciertos aspectos específicos del problema estudiado. Permiten focalizar la atención de los estudiantes sobre una determinada variable del problema y aislarla del resto a los efectos de proceder a su estudio detallado, realizando predicciones sobre su comportamiento a partir de cambios o modificaciones en las condiciones iniciales del

problema o en las características dinámicas del sistema estudiado.

Actividades de aprendizaje con dispositivos dinámicos experimentales

Se realiza en el aula una actividad de aprendizaje a partir de tres experiencias con seis sistemas dinámicos simples denominados en el contexto de la presente propuesta osciladores. En las distintas experiencias se solicita en primer lugar a los estudiantes que, a partir de la observación de los osciladores puestos en juego en cada una de ellas, realicen un croquis cualitativo de los mismos y reflexionen sobre sus características.

A continuación los estudiantes deben responder una serie de preguntas relacionadas al comportamiento a esperar en cada oscilador, realizar representaciones cualitativas de la respuesta esperada, indicar problemas reales que a criterio del estudiante podrían ser estudiados mediante el modelo físico en estudio, entre otras. En el siguiente momento de clase se experimenta concretamente con los osciladores de la experiencia correspondiente, con lo cual los estudiantes ven corroboradas o no sus conjeturas previas. Se realiza la discusión correspondiente guiada por el docente y se pasa a la siguiente experiencia.

Resultados obtenidos

En un trabajo anterior (Totter, et. al., 2013) se describieron con suficiente detalle los criterios de diseño y desarrollo de la primera implementación de una serie de Dispositivos Dinámicos, que configuran un laboratorio áulico de características experimentales para la enseñanza de fenómenos asociados a sistemas dinámicos en el marco de la asignatura Matemática Avanzada. En virtud de los excelentes resultados obtenidos a partir de su implementación, se inició durante el segundo semestre del ciclo lectivo 2013, un proceso de ampliación de la variedad de dispositivos desarrollados y una profundización de las

estrategias de implementación de los mismos en el aula de trabajo. La Tabla 2 muestra una breve descripción de los dispositivos diseñados e implementados en la segunda etapa mencionada.

| Contenido temático del programa de la asignatura | Dispositivo dinámico diseñado |
|--|---|
| Modelación matemática. Sistemas dinámicos lineales de un grado de libertad. | Pórtico de aluminio de un grado de libertad de altura configurable y rigidez de columnas variable |
| Modelación matemática. Sistemas dinámicos lineales de varios grados de libertad | Pórtico de aluminio de dos y tres grados de libertad y rigidez de columnas variable |
| Modelación matemática. Sistemas dinámicos lineales de varios grados de libertad | Pórtico de un piso y un vano, con péndulo físico acoplado. |
| Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Ecuación de la onda bidimensional | Placa vibrante bidimensional de acero con control de frecuencia variable. |

Tabla 2. Contenidos seleccionados y los dispositivos dinámicos asociados para la segunda etapa de implementación de la propuesta.

La Figura 1, muestra el dispositivo denominado pórtico, en su configuración de tres grados de libertad, montado sobre el laboratorio áulico experimental de la asignatura.

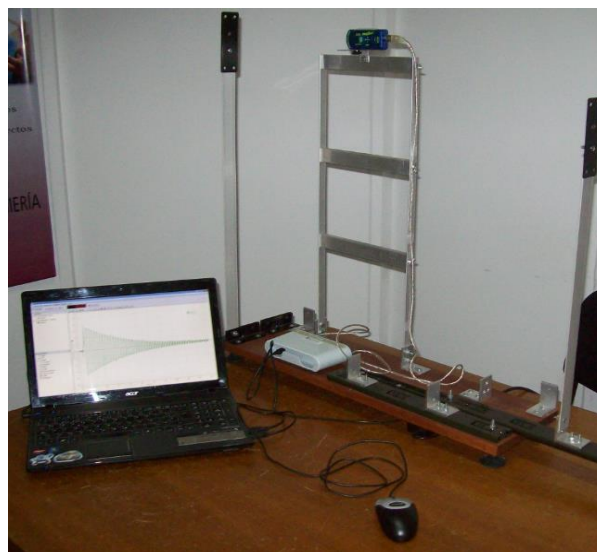


Figura 1. Dispositivo experimental desarrollado para el estudio de los modos libres de vibración de una placa plana cuadrada.

Es importante destacar, que el dispositivo dinámico ubicado en cuarto lugar de la Tabla 1, fue desarrollado por uno de los grupos de estudiantes de la asignatura, en el marco de los Trabajos Integradores de Investigación que se desarrollan durante el cursado de la asignatura, (Totter, *et. al.* 2011). Dichos Trabajos Integradores constituyen una de las estrategias integradoras utilizadas por la cátedra y consisten en la investigación, desarrollo, presentación y defensa de un tema seleccionado previamente al principio del ciclo lectivo.

La Figura 2 permite observar el dispositivo experimental diseñado e implementado por el mencionado grupo de estudiantes, el cual se encuentra orientado al estudio de los modos naturales de vibración de una placa plana de acero de pequeño espesor, en el presente caso con relación de lados igual a 1.

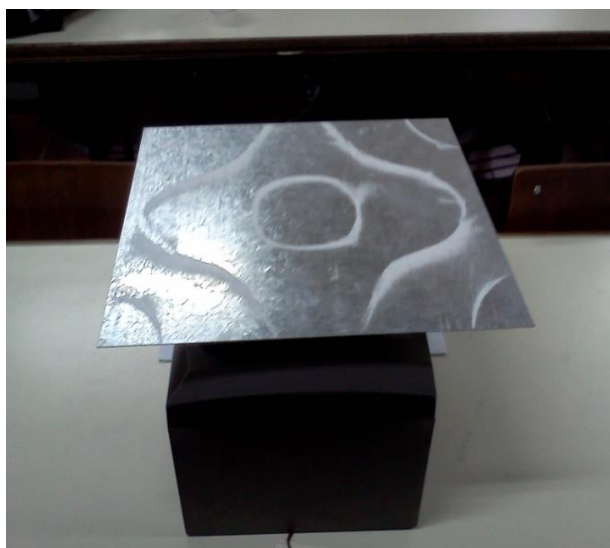


Figura 2. Dispositivo experimental desarrollado para el estudio de los modos libres de vibración de una placa plana cuadrada.

En forma adicional, es posible observar en la Figura, la formación de determinados patrones de líneas nodales en correspondencia con los puntos de la placa que no presentan desplazamientos verticales para el caso de uno de los modos naturales de vibración tal como el presentado en la fotografía.

Desde el punto de vista del segundo grupo de recursos tecnológicos mencionados, es decir

los recursos computacionales interactivos, se desarrollaron en la segunda etapa del proyecto, simulaciones computacionales adicionales a las existentes previamente, para el estudio y análisis de nuevos fenómenos no contemplados previamente. La Tabla 3 presenta un detalle de las simulaciones mencionadas.

| Contenido temático del programa de la asignatura | Simulaciones computacionales interactivas |
|--|--|
| Modelación matemática. Sistemas dinámicos lineales rotacionales de varios grados de libertad | Péndulo doble. |
| Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Ecuación de la onda bidimensional | Simulación computacional Placa vibrante bidimensional. |

Tabla 3. Simulaciones computacionales interactivas diseñadas en la segunda etapa de implementación de la propuesta.

La Figura 3 permite apreciar un ejemplo de la evolución de las variables representativas de las coordenadas generalizadas de giro de un péndulo doble ideal, junto con los respectivos diagramas de fases de las mismas, visualizadas a partir de la utilización de una simulación computacional específicamente diseñada, desarrollada a partir de la utilización del software Easy Java Simulations.

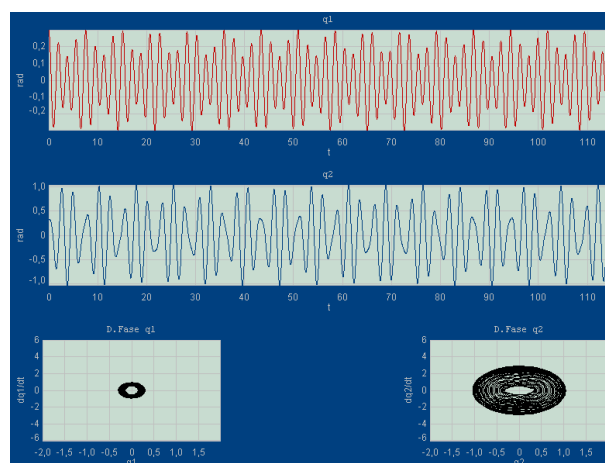


Figura 3. Simulación computacional interactiva para el estudio de un sistema dinámico lineal con dos coordenadas generalizadas de giro.

Es importante destacar, que la simulación computacional interactiva ubicada en segundo

término de la Tabla 3, fue desarrollada por uno de los grupos de estudiantes de la asignatura, en el marco de los Trabajos Integradores de Investigación mencionados anteriormente. Para ello se desarrolló un código propio basado en el Método de las Diferencias Finitas implementado en el software MATLAB. La Figura 2 muestra una imagen de la placa obtenida con la simulación computacional mencionada.

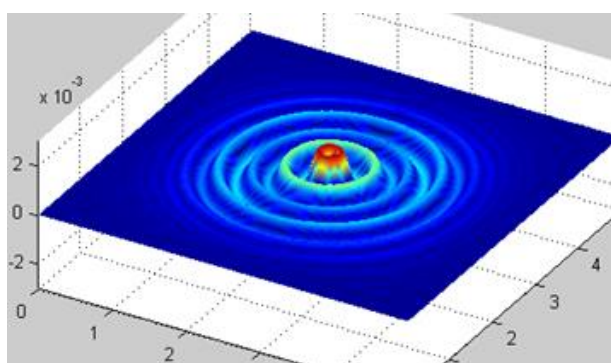


Figura 2. Simulación computacional desarrollada para el estudio de los modos libres de vibración de una placa plana cuadrada.

De la misma forma, en la Figura 3 es posible observar distintos modos de vibración de la placa estudiada, obtenidos a partir de la utilización de las simulaciones desarrolladas.

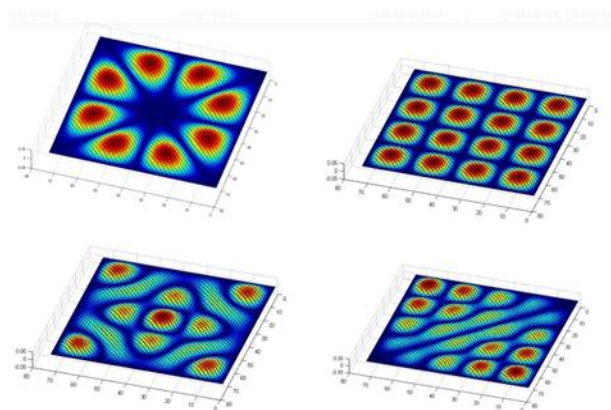


Figura 3. Diversos modos de vibración de una placa plana cuadrada, obtenidos a partir de la resolución del modelo matemático que representa el fenómeno en estudio.

Conclusiones

Las interacciones que se generan a partir de las actividades significativas de aprendizaje que incluyen la utilización de los recursos tecnológicos descriptos, del estudiante consigo mismo, con sus pares y con el docente, activan procesos de comparación, exploración, análisis, reflexión, valoración y transferencia del nuevo conocimiento, que potencian el aprendizaje complejo de los contenidos involucrados.

La utilización de escenarios computacionales interactivos y dispositivos dinámicos experimentales, en intervenciones educativas coherentemente integradas y articuladas, completa un enfoque multidimensional de un modelo pedagógico dinámico y flexible que tiende a potenciar la calidad del aprendizaje significativo de conceptos complejos asociados a la dinámica lineal. Se incrementan de este modo las posibilidades de visualización, exploración e interacción de los estudiantes con un determinado problema dinámico de interés ingenieril, asociado a su especialidad, a la vez que se lo acerca a problemática asociada a su futura práctica profesional.

Agradecimientos

El presente trabajo, es parte integrante de un Proyecto de Investigación Bianual 2013- 2015 de la Secretaría de Ciencia, Técnica y Posgrado de la Universidad Nacional de Cuyo, denominado “Escenarios Matemáticos Interactivos y Dispositivos Dinámicos Experimentales en el marco de un modelo pedagógico multidimensional para el aprendizaje complejo de Matemática Avanzada”. Los autores desean agradecer a dicha Secretaría por la financiación y apoyo brindado a partir del Proyecto mencionado.

Referencias Bibliográficas

Collazos Morales, C.A.; “Enseñanza de la conservación del momento angular por medio de la construcción de prototipos y el

aprendizaje basado en proyectos". Latin American Journal of Physics Education, Vol 3, N°2, Mayo de 2009.

Programa de Matemática Avanzada, carrera de Ingeniería en Mecatrónica. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina, 2013.

Programa Easy Java Simulations. Sitio web oficial, <http://fem.um.es/EJS>.

Programa Matlab. Sitio web oficial, <http://mathworks.com>.

Raichman, S., Totter, E., Palazzo, G., Masnù, V.; *"Hacia una mejora en la calidad del aprendizaje significativo de métodos numéricos en Ingeniería: un enfoque multidimensional del problema"*. XX Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. (ENIEF 2013). En: Mecánica Computacional XXXII, pp. 3061-3071. C. García Garino, A. Mirasso, M. Storti, M. Tornello (Eds.). ISSN 1666-6070. Mendoza, Argentina. Noviembre de 2013.

Totter, E., Raichman, S., Mirasso, A.; *"Desarrollo de simulaciones computacionales como estrategia de acercamiento a la investigación. Una experiencia en la asignatura Matemática Avanzada de la Carrera Ingeniería en Mecatrónica"*. VI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología. Salta, Junio de 2011.

Totter, E., Raichman, S., Mirasso, A.; *"Diseño de un laboratorio áulico basado en Dispositivos Dinámicos Experimentales orientado a promover el aprendizaje complejo de contenidos de Matemática Avanzada"*. VIII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología. Santiago del Estero, Junio de 2013.

Verdejo, P., Freixas, R.; *"Educación para el pensamiento complejo y competencias: diseño de tareas y experiencias de aprendizaje"*. Aseguramiento de la Calidad de la Educación y en el Trabajo, S.C. México, 2009.